

Simulación directa de turbulencia de flujo secundario en ductos con forzado no homogéneo

Julia V. Martorana, Mariano I. Cantero & Enzo A. Dari

To cite this article: Julia V. Martorana, Mariano I. Cantero & Enzo A. Dari (2018) Simulación directa de turbulencia de flujo secundario en ductos con forzado no homogéneo, Ribagua, 5:2, 143-156, DOI: [10.1080/23863781.2018.1525268](https://doi.org/10.1080/23863781.2018.1525268)

To link to this article: <https://doi.org/10.1080/23863781.2018.1525268>



© 2018 The Author(s). Published by Informa UK Limited, trading as Taylor & Francis Group on behalf of the International Association for Hydro-Environment Engineering and Research (IAHR).



Published online: 12 Dec 2018.



Submit your article to this journal [↗](#)



View Crossmark data [↗](#)

Simulación directa de turbulencia de flujo secundario en ductos con forzado no homogéneo

Julia V. Martorana^{a,b,c}, Mariano I. Cantero^{a,b,d} and Enzo A. Dari^{a,b,d}

^aInstituto Balseiro, San Carlos de Bariloche, Argentina; ^bCentro Atómico Bariloche, Comisión Nacional de Energía Atómica, San Carlos de Bariloche, Argentina; ^cEscuela de Producción, Sede Andina, Universidad Nacional de Río Negro, San Carlos de Bariloche, Argentina; ^dConsejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, San Carlos de Bariloche, Argentina

RESUMEN

La generación de flujo secundario en ductos rectos de sección rectangular se debe exclusivamente a la turbulencia. En muchos flujos ambientales existen efectos de estratificación que afectan la turbulencia y pueden modificar el flujo secundario. En las corrientes de turbidez, por ejemplo, en la escala microscópica la estratificación modula la turbulencia y en la escala macroscópica la estratificación modula la fuerza impulsora del flujo. El objetivo de este trabajo es analizar de forma aislada el efecto macroscópico de la estratificación sobre el flujo secundario modelando el forzado no homogéneo con un gradiente de presión no uniforme lineal en la dirección vertical. Resultados de simulaciones numéricas directas (DNS, por Direct Numeric Simulations) muestran una pérdida de simetría del flujo medio principal con respecto al eje medio horizontal y un desplazamiento de las posiciones de los valores máximos de velocidad hacia la pared inferior del ducto. En el flujo secundario se observa que los vórtices superiores se extienden hacia la zona central de la sección impactando en la distribución del esfuerzo de corte en las paredes. Los resultados muestran modificaciones en los valores rms de las velocidades que indican una atenuación de la turbulencia en la mitad inferior de la sección.

ARTICLE HISTORY

Received 20 July 2017
Revised 24 November 2017
Accepted 24 November 2017

PALABRAS CLAVE

Flujo secundario; corrientes de turbidez; ducto; DNS; turbulencia

1. Introducción

En muchos fenómenos de la naturaleza y en varias clases de turbomáquinas se producen flujos de menor magnitud que el principal, denominados flujos secundarios. En las curvas de los ríos, por ejemplo, se genera un flujo secundario debido a la inclinación del vector vorticidad. Esta variación provoca una circulación en el plano transversal a la dirección principal que produce la erosión de la margen externa de la curva y la deposición de los sedimentos en la margen interna. Este tipo de flujo se denomina flujo secundario de primer tipo y puede existir tanto en flujo laminar como en flujo turbulento [1].

El flujo secundario clasificado como de segundo tipo, en cambio, surge sólo en presencia de turbulencia [2]. Un ejemplo de este tipo de flujo es el que ocurre en un ducto de sección rectangular en donde se produce una recirculación de flujo desde el centro de la sección hacia las esquinas del ducto por las bisectrices de las mismas, y luego una circulación por las paredes hacia las bisectrices de las mismas.

A pesar de que el flujo secundario de segundo tipo es relativamente débil, sus efectos pueden ser importantes. El flujo secundario produce un incremento en

las tensiones de corte en las paredes y este efecto es fundamental en problemas de transporte de sedimentos y erosión [3]. De manera similar, la transferencia de calor y la difusión de contaminantes están influenciadas por los flujos secundarios [4]. Por estas razones es importante entender el comportamiento del flujo secundario y lograr predecir de forma precisa este fenómeno.

Se han realizado diversos estudios sobre este tipo de flujo secundario. Los primeros trabajos que presentan simulaciones numéricas directas (DNS, por *Direct Numerical Simulations*) [5, 6] analizan el comportamiento y origen del flujo secundario. Trabajos más actuales muestran la influencia del número de Reynolds en el flujo medio [7, 8] y el efecto de la relación de aspecto de la sección del ducto [9], todos mediante cálculos por DNS. Entre las simulaciones de grandes remolinos (LES, por *Large Eddy Simulations*) se pueden nombrar los trabajos de Madabhushi [10], Breuer [11] y Yao [12]. En estos trabajos también se lleva a cabo el análisis de las características del flujo para diferentes números de Reynolds. Entre los trabajos que reportan experimentos con este tipo de flujo se encuentran los de Brundrett [13], Launder [14]

y Melling [15] para números de Reynolds altos ($Re_b > 35000$; donde $Re = u_b h / \nu$, donde u_b es la velocidad media, h es el semiancho del ducto y ν es la viscosidad cinemática). Experimentos para números de Reynolds bajos fueron realizados por Kawahara [16] ($Re_b = 3535$) y Owolabi [17] ($Re_b = 1203$ y 2230).

En este trabajo se estudia el flujo secundario de segundo tipo que se origina por el flujo turbulento en un ducto de sección cuadrada forzado por un gradiente de presión no uniforme lineal en la dirección vertical. Este tipo de forzado se aplica para modelar el efecto que produce la estratificación sobre la fuerza impulsora del flujo.

Los flujos estratificados son aquellos en los que la densidad varía en la dirección vertical. Las diferencias en la densidad pueden deberse a variaciones en la temperatura, a fases disueltas (sólidos, líquidos o gases) y a sólidos en suspensión. Un tipo de flujo estratificado de particular interés es el de las corrientes de gravedad. Estos flujos estratificados se generan por la acción de la gravedad sobre diferencias relativamente pequeñas de densidad entre dos fluidos [18]. El hecho de que el flujo sea forzado por la acción de la gravedad sobre los perfiles de densidad hace que los efectos de estratificación aparezcan en dos escalas muy diferentes. En la escala microscópica la estratificación modula la turbulencia y en la escala macroscópica modula la fuerza impulsora del flujo.

Cuando los cambios de densidad en el flujo se deben a sólidos en suspensión por acción de la turbulencia, los flujos se denominan corrientes de turbidez. Uno de los objetivos de largo plazo del estudio de este tipo de corrientes reside en analizar cómo el sedimento interactúa con el flujo, cambiando la estructura turbulenta del mismo y en consecuencia modificando el mezclado de la fase sólida con el fluido ambiente y los perfiles de velocidad y de concentración del flujo. Se han llevado a cabo numerosos estudios en este sentido. Armenio y Sarkar [19], por ejemplo, realizaron cálculos por LES de un flujo establemente estratificado en un canal y observaron que un incremento de estratificación induce una reducción sistemática de los niveles de turbulencia, fluctuaciones de densidades y transporte vertical asociado. Por otro lado, Cantero et al. [20, 21] y Shringarpure et al. [22, 23, 24] realizaron cálculos por DNS de un flujo turbulento auto-estratificado forzado por sedimentos en suspensión y mostraron que esta auto-estratificación disminuye la turbulencia, en particular cerca del fondo del canal. En los trabajos de Cantero et al. y de Shringarpure et al. se combinan los efectos de estratificación microscópicos de modulación de la turbulencia con los efectos de estratificación macroscópicos de modulación de la fuerza impulsora. Por el diseño mismo de estos estudios es imposible discriminar por separado

cada uno de estos efectos. El forzado del flujo propuesto en este trabajo modela el efecto de estratificación macroscópico aisladamente.

En este trabajo se estudia cómo se modifica la estructura del flujo por los efectos de estratificación en la fuerza impulsora del flujo. Esto se modela con gradientes de presión no uniformes. Para esto se analizan las variaciones que se producen en el flujo secundario de segundo tipo cuando el flujo es forzado por gradientes de presión que varían linealmente en la dirección vertical. Las simulaciones del flujo analizado se llevan a cabo mediante cálculos DNS. Éstas se realizaron mediante un código de cálculo pseudo-espectral que utiliza expansiones de Fourier en la dirección principal y expansiones de Chebyshev en las direcciones restantes. El trabajo se concentra en documentar de manera detallada el modelo numérico utilizado y su validación mediante una simulación tridimensional de un flujo turbulento en un ducto cuadrado con datos reportados en la bibliografía. Para el análisis de las variaciones en el flujo secundario con forzado no uniforme se estudiaron cinco casos de variación lineal del gradiente de presión en la dirección vertical. Se presentan los resultados obtenidos sobre el flujo principal, el flujo secundario y la turbulencia.

2. Modelo matemático

El sistema de coordenadas cartesiano y las características geométricas utilizados en este trabajo se pueden observar en la Figura 1. El ducto tiene un largo $L_x = 4\pi h$, un ancho $L_z = 2h$ y un alto $L_y = 2h$. La longitud en la dirección del flujo L_x es suficiente para permitir el adecuado decaimiento de la correlación de velocidades entre dos puntos de acuerdo con Pinelli [8], y Gavrilakis [6]. Las ecuaciones adimensionales que gobiernan el flujo en este caso son

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re_\tau} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (2)$$

donde $\tilde{\mathbf{u}} = \{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}$ es el campo de velocidades adimensional, \tilde{p} es la presión adimensional y \mathbf{F} es el gradiente de presión no uniforme en la vertical que fuerza el flujo en la dirección x ($\mathbf{F} = \{F_x(y), 0, 0\}$). Para la adimensionalización de las ecuaciones (1)-(2) se utiliza como escala de velocidad la velocidad de corte $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$, donde τ_w es el esfuerzo de corte en la pared y ρ es la densidad del fluido. Como escala de longitud se toma el semiancho del ducto h , para la

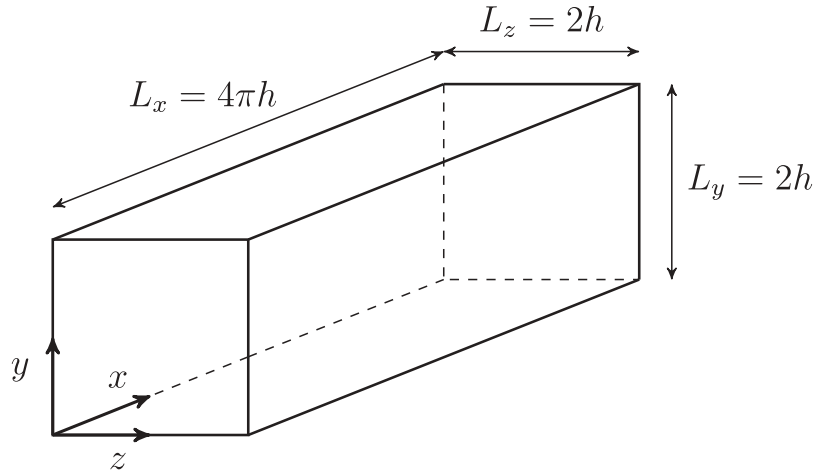


Figura 1. Geometría y sistema de coordenadas empleados para el estudio de flujo secundario en un ducto.

escala temporal se emplea $T = h/u_\tau$ y para la escala de presión ρu_τ^2 . El flujo depende del número de Reynolds $Re_\tau = u_\tau h/\nu$, donde ν es la viscosidad cinemática del fluido.

3. Modelo numérico

3.1. Geometría

El dominio está compuesto por cuatro paredes y posee dimensiones $4\pi h \times 2h \times 2h$ (Figura 1). El flujo es periódico en la dirección x y no homogéneo en las direcciones z e y por la presencia de las paredes.

3.2. Discretización temporal

La resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes (1)-(2) se lleva a cabo mediante el Método de Paso Fraccionado [25]. Este enfoque utiliza un esquema temporal dividido en dos pasos. En el primer paso del método se calcula un campo de velocidades intermedio \mathbf{u}^* en base a la ecuación de cantidad de movimiento (1):

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^*}{\Delta t} - \frac{1}{2Re_\tau} \nabla^2 \mathbf{u}^* &= \frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} - \frac{23}{12} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^n + \frac{16}{12} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n-1} \\ &\quad - \frac{5}{12} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n-2} + \frac{1}{2Re_\tau} \nabla^2 \mathbf{u}^n + \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (3)$$

Aquí se ha discretizado el término advectivo de forma explícita mediante un esquema de Adams-Bashforth de tercer orden y el término difusivo de manera implícita por medio del esquema de Crank-Nicolson. Para mayor claridad se han eliminado las tildes de las variables adimensionalizadas.

Debido al término faltante de la presión en (3), la velocidad intermedia \mathbf{u}^* no posee divergencia nula. El segundo paso de este método consiste en corregir la velocidad intermedia de modo tal que

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1}, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0. \quad (5)$$

Combinadas, las ecuaciones (4)-(5) implican resolver

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*. \quad (6)$$

El avance desde el tiempo n al tiempo $n+1$ comienza con la obtención del campo de velocidades intermedio \mathbf{u}^* por medio de la expresión (3). Luego se calcula la presión para el tiempo siguiente, p^{n+1} , con la Ecuación (6). Finalmente, se aplica la expresión (4) para obtener el nuevo valor de velocidad \mathbf{u}^{n+1} .

3.3. Discretización espacial

De la discretización temporal resultan dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales elípticas de la forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \sigma \right) g(x, y, z) = rhs(x, y, z). \quad (7)$$

En el caso de la Ecuación (3) se tiene

$$g(x, y, z) = \mathbf{u}^*,$$

$$\sigma = 2Re_\tau/\Delta t,$$

$$\begin{aligned} rhs(x, y, z) = & \frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} - \frac{23}{12}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^n + \frac{16}{12}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n-1} \\ & - \frac{5}{12}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n-2} + \frac{1}{2Re_\tau} \nabla^2 \mathbf{u}^n + \mathbf{F}; \end{aligned} \quad (8)$$

mientras que para la Ecuación (6)

$$g(x, y, z) = p^{n+1},$$

$$\sigma = 0,$$

$$rhs(x, y, z) = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*. \quad (9)$$

Para la resolución numérica de la Ecuación (7) se discretiza el dominio en las direcciones espaciales x , y y z utilizando expansiones de Fourier con puntos equiespaciados en la dirección x , periódica, mientras que en las direcciones y y z se utilizan polinomios de Chebyshev con puntos de cuadratura Gauss-Lobatto [26]. Las posiciones de los puntos de la grilla están dadas por las expresiones

$$z_j = \frac{L_z}{2} \left[-\cos\left(\frac{(j-1)\pi}{N_z-1}\right) + 1 \right], \quad 1 \leq j \leq N_z,$$

$$y_i = \frac{L_y}{2} \left[-\cos\left(\frac{(i-1)\pi}{N_y-1}\right) + 1 \right], \quad 1 \leq i \leq N_y,$$

$$x_m = \frac{mL_x}{N_x}, \quad 0 \leq N_x - 1,$$

donde N_x , N_y y N_z son las cantidades de puntos de la grilla en las direcciones x , y y z respectivamente.

3.3.1. Discretización de fourier

Realizando la transformada de Fourier en dirección x a la Ecuación (7) se tiene

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(\sigma + \frac{k^2 4\pi^2}{L_x^2} \right) \right] \hat{g}(y, z) = r\hat{h}s(y, z) \quad (10)$$

donde \hat{g} y $r\hat{h}s$ son los correspondientes coeficientes de Fourier. La Ecuación (10) es una ecuación bidimensional de Helmholtz en z e y para cada coeficiente de Fourier correspondiente al número de onda k .

3.3.2. Solución de la ecuación de Helmholtz en dos dimensiones

Se necesita resolver expresiones de la forma (10) sobre un dominio rectangular con condiciones de borde de Dirichlet o Neumann aplicadas en los cuatro bordes

discretizados en $N_z \times N_y$ puntos de colocación. En las direcciones z e y se aplica una discretización espectral de Chebyshev [26]. Los cálculos de las derivadas en las direcciones z e y se expresan en términos de multiplicación matricial combinando una transformación discreta de Chebyshev, diferenciación recursiva y una transformación discreta de Chebyshev inversa. La derivada segunda se obtiene mediante la multiplicación de dos operadores de derivada primera. En los puntos interiores del dominio, se aplica la forma discretizada de las ecuaciones gobernantes y de forma similar en los bordes se aplica la condición de borde específica. Esto produce un sistema de $N_z \times N_y$ ecuaciones. Las ecuaciones discretizadas en los puntos interiores tienen la forma

$$\sum_{s=1}^{N_z} DZ_{is}^2 \hat{g}_{k_{sj}} + \sum_{s=1}^{N_y} \hat{g}_{k_{is}} DY_{sj}^2 - \left(\sigma + \frac{k^2 4\pi^2}{L_x^2} \right) \hat{g}_{k_{ij}} = r\hat{h}s_{k_{ij}} \quad (11)$$

$$i = 2, \dots, N_z - 1 \text{ y } j = 2, \dots, N_y - 1,$$

donde DZ^2 y DY^2 son las matrices de las derivadas segundas [26] con respecto a z y a y respectivamente.

El primer paso del el Método Rápido de Solución de Helmholtz consiste en reducir el sistema de ecuaciones a través de la eliminación de las ecuaciones de los bordes y de los valores desconocidos en éstos. El proceso de reducción se detalla en la Sección 3.4. El sistema reducido resultante tiene la forma

$$\tilde{D}Z^2 \tilde{\hat{g}}_k + \tilde{\hat{g}}_k \tilde{D}Y^2 - \tilde{\sigma} \tilde{\hat{g}}_k = r\tilde{h}s_k, \quad (12)$$

donde $\tilde{\hat{g}}_k$ es la matriz de solución reducida que contiene solamente los valores de los puntos interiores de \hat{g}_k y por lo tanto posee un tamaño $(N_z - 2) \times (N_y - 2)$.

De manera similar, $r\tilde{h}s_k$ es la parte interior de $r\hat{h}s_k$ modificada por la incorporación de las condiciones de borde y de tamaño $(N_z - 2) \times (N_y - 2)$. Las matrices $\tilde{D}Z^2$ y $\tilde{D}Y^2$ son las matrices reducidas de las derivadas segundas y poseen un tamaño de $(N_z - 2) \times (N_z - 2)$ y $(N_y - 2) \times (N_y - 2)$, respectivamente. Por último, $\tilde{\sigma} = \sigma + k^2 4\pi^2 / L_x^2$.

Las matrices $\tilde{D}Z^2$ y $\tilde{D}Y^2$ pueden ser diagonalizadas por lo que pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \tilde{D}Z^2 &= P \Lambda_z P^{-1}, \\ \tilde{D}Y^2 &= Q \Lambda_y Q^{-1}, \end{aligned} \quad (13)$$

donde P y Q son las matrices de autovectores de $\tilde{D}Z^2$ y $\tilde{D}Y^2$, respectivamente, y Λ_z y Λ_y son las matrices diagonales que contienen los autovalores

correspondientes. La Ecuación (12) puede reescribirse a partir de (13) como

$$P\Lambda_z P^{-1} \tilde{g}_k + \tilde{g}_k Q \Lambda_y Q^{-1} - \tilde{\sigma} \tilde{g}_k = \tilde{r} \tilde{h} s_k.$$

Multiplicando por la izquierda por P^{-1} y por la derecha por Q se obtiene

$$\begin{aligned} \Lambda_z P^{-1} \tilde{g}_k Q + P^{-1} \tilde{g}_k Q \Lambda_y - \tilde{\sigma} P^{-1} \tilde{g}_k Q \\ = P^{-1} \tilde{r} \tilde{h} s_k Q. \end{aligned} \quad (14)$$

Definiendo

$$A = P^{-1} \tilde{g}_k Q, \quad (15)$$

$$R = P^{-1} \tilde{r} \tilde{h} s_k Q, \quad (16)$$

la Ecuación (14) se puede expresar como

$$\Lambda_z A + A \Lambda_y - \tilde{\sigma} A = R. \quad (17)$$

Las matrices Λ_z y Λ_y son diagonales, por lo que los términos de (17) se pueden expresar como

$$\begin{aligned} (\Lambda_z A)_{ij} &= \Lambda_{z_i} a_{ij} \\ (i &= 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M), \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} (A \Lambda_y)_{ij} &= \Lambda_{y_j} a_{ij} \\ (i &= 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M), \end{aligned} \quad (18b)$$

donde a_{ij} son las componentes de A .

Reemplazando (18) en (17) y despejando a_{ij} se tiene

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{R_{ij}}{\Lambda_{z_i} + \Lambda_{y_j} - \tilde{\sigma}} \\ (i &= 2, \dots, N_y - 2; j = 2, \dots, N_z - 2). \end{aligned} \quad (19)$$

En síntesis, el procedimiento de cálculo es el siguiente:

- (1) Se calculan las matrices de autovalores (Λ_z y Λ_y); y las matrices de autovectores (P y Q).
- (2) Se obtiene R mediante la expresión (16).
- (3) Se calcula el valor de a por medio de la Ecuación (19).
- (4) Se utiliza la inversa de la expresión (15) para obtener el valor de \tilde{g} .

3.4. Tratamiento de las condiciones de contorno

El sistema de ecuaciones mostrado en (11) representa las ecuaciones para los puntos interiores del dominio. Para completar estas ecuaciones, se requiere de

condiciones de borde en todos los contornos del dominio. El sistema discretizado que se quiere resolver para cada número de onda k es entonces

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{N_z} DZ_{is}^2 \hat{g}_{sj} + \sum_{s=1}^{N_y} \hat{g}_{is} DY_{sj}^2 - \left(\sigma + \frac{k^2 4\pi}{L_x^2} \right) \hat{g}_{ij} &= \tilde{r} \tilde{h} s_{ij}, \\ i &= 2, \dots, N_z - 1, j = 2, \dots, N_y - 1; \end{aligned} \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \alpha_b \hat{g}_{i1} + \beta_b \sum_{s=1}^{N_y} \hat{g}_{is} DY_{s1}^1 &= c_{i1}, \\ i &= 2, \dots, N_z - 1; \end{aligned} \quad (20b)$$

$$\begin{aligned} \alpha_t \hat{g}_{iN_y} + \beta_t \sum_{s=1}^{N_y} \hat{g}_{is} DY_{sN_y}^1 &= c_{iN_y}, \\ i &= 2, \dots, N_z - 1; \end{aligned} \quad (20c)$$

$$\begin{aligned} \alpha_l \hat{g}_{1j} + \beta_l \sum_{s=1}^{N_z} DZ_{1s}^1 \hat{g}_{sj} &= c_{1j}, \\ j &= 1, \dots, N_y; \end{aligned} \quad (20d)$$

$$\begin{aligned} \alpha_r \hat{g}_{N_z j} + \beta_r \sum_{s=1}^{N_z} DZ_{N_z s}^1 \hat{g}_{sj} &= c_{N_z j}, \\ j &= 1, \dots, N_y; \end{aligned} \quad (20e)$$

donde DZ^1 y DY^1 (DZ^2 y DY^2) son las matrices de derivadas primeras (segundas) con respecto a z y a y respectivamente, \hat{g} es la matriz de coeficientes de Fourier de la variable incógnita (la velocidad intermedia u^* o la presión en el paso siguiente p^{n+1}) y $\tilde{r} \tilde{h} s$ es la matriz de coeficientes de Fourier de los términos conocidos. Los subíndices b , t , l y r corresponden a los bordes inferior, superior, izquierdo y derecho respectivamente.

Para la velocidad u en dirección del flujo, se impone la condición de no deslizamiento en las cuatro paredes, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $c = 0$. Para la velocidad horizontal w se impone la condición de no deslizamiento en las paredes horizontales y la condición de no penetración en las paredes verticales. Para la velocidad vertical v se impone la condición de no deslizamiento en las paredes verticales y la condición de no penetración en las paredes horizontales. En estos casos, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $c = 0$. Para la ecuación de presión (6) se imponen condiciones de borde de derivada normal nula en las cuatro paredes con lo cual los coeficientes de las ecuaciones toman los valores $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $c = 0$.

3.5. Procedimiento de resolución

Al inicio del cálculo, y fuera del bucle temporal, se calculan las matrices de derivadas y los

correspondientes autovalores y autovectores (13). Durante cada bucle temporal se debe resolver una ecuación de Helmholtz en dos dimensiones para cada componente de velocidad intermedia (\mathbf{u}^*) y una para la presión (p) para cada número de onda k . Debido al gran costo computacional que esto implica, el código se paralelizó empleando *OpenMP*. Como la ejecución del algoritmo de solución de Helmholtz se lleva a cabo en forma independiente para cada número de onda luego de aplicar la transformada de Fourier en la dirección x , se paralelizó el bloque de código que realiza este cálculo. El análisis de desempeño de esta paralelización se presenta en Martorana [26]. En el esquema que se muestra en la Figura 2 se presenta la marcha de cálculo para completar un paso de tiempo.

4. Resultados

4.1. Validación

Se llevó a cabo la simulación de un flujo turbulento a $Re_\tau = 180$ en un ducto de sección cuadrada de dimensiones $L_x \times L_y \times L_z = 4\pi h \times 2h \times 2h$ [8]. La longitud en la dirección del flujo es suficiente para permitir el adecuado decaimiento de la correlación de velocidades entre dos puntos de acuerdo con Pinelli [8] y Gavrilakis [6]. El flujo es forzado por un gradiente de presión $\mathbf{F} = \{2, 0, 0\}$, uniforme en la dirección vertical.

Para este caso se analizó la sensibilidad de diferentes tamaños de grillas de cálculo adoptados. En una primera instancia se incrementó la cantidad de puntos en el plano $y - z$ y luego en la dirección x . Los resultados obtenidos se compararon con los exhibidos en los trabajos de Gavrilakis [6], y Vinuesa [9]. Estas investigaciones presentan cálculos por DNS de flujo turbulento en un ducto de sección cuadrada para valores de Re_τ igual a 150 y 180, respectivamente. Además se contrastaron los resultados numéricos con observaciones experimentales obtenidas por Owolabi [17]. La Tabla 1 presenta valores característicos del problema para los casos estudiados y para las referencias utilizadas en la comparación. Las referencias para los valores presentados en la tabla son: $Re_b = u_b h / \nu$ es el número de Reynolds basado en la la velocidad media u_b , $u_{\tau,l} = \sqrt{\tau_{w,l} / \rho}$ es la velocidad de corte local, $\tau_{w,l}$ es el esfuerzo de corte en el centro de la pared inferior, $u_{\tau,avg} = \sqrt{\bar{\tau}_w / \rho}$ es la velocidad de corte promedio y u_c es la velocidad en el centro de la sección. El factor de fricción f se calcula como $f = 8u_\tau^2 / u_b^2$. En este caso, los valores obtenidos con la simulaciones tienen

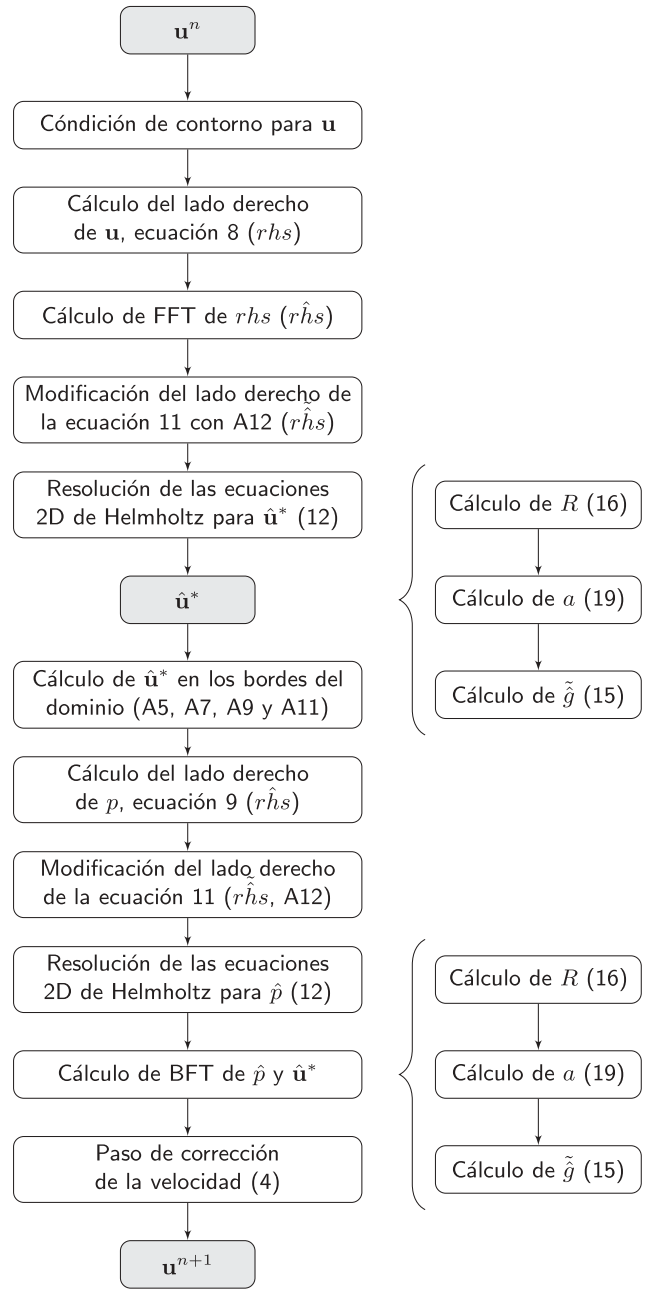


Figura 2. Diagrama de flujo de las operaciones de cálculo necesarias para el avance de un paso temporal Δt para un número de onda k . Las siglas 'FFT' y 'BFT' se refieren a la transformada rápida y a la transformada rápida inversa de Fourier, respectivamente.

un buen acuerdo con el valor de fricción que cumple con la correlación de Jones: $f^{-1/2} = 2\log_{10}(2.25Re_b f^{1/2}) - 0.8$ [28].

La estadística del flujo medio se obtuvo promediando en el tiempo y en la dirección del flujo los valores instantáneos. El promediado se realizó, además, entre los cuatro cuadrantes de la sección, aprovechando las

Tabla 1. Comparación de valores obtenidos para distintas grillas y referencias.

Caso/Referencia	Re_τ	Re_b	$u_{\tau,l}/u_{\tau,avg}$	$u_c/u_{\tau,l}$	$u_b/u_{\tau,avg}$	u_c/u_b	$\tau_w/\bar{\tau}_w$	f
$131 \times 131 \times 192$ (A)	180	2721	1.07	18.49	15.12	1.31	1.15	0.0350
$151 \times 151 \times 192$ (B)	180	2726	1.07	18.54	15.14	1.31	1.15	0.0349
$131 \times 131 \times 256$ (C)	180	2723	1.08	18.45	15.13	1.31	1.17	0.0350
Gavrilakis [6]	150	2205	1.09	17.94	14.70	1.33	1.18	0.0370
Vinuesa [9]	180	2800	—	18.50	15.56	—	—	—
Pinelli [8]	151	2205	—	14.61	—	—	1.16	0.0375
Owolabi [17]	161	2230	—	—	—	1.31	—	—

simetrías del flujo (tanto en dirección y como en dirección z). De este modo, se incrementa el tamaño de la muestra para el cálculo de valores estadísticos, lo que resulta equivalente a promediar datos correspondientes a periodos más largos [9].

La simulación se inicia a partir un campo de velocidades interpolado de un caso de flujo turbulento en un canal obtenido mediante un cálculo por DNS. El tiempo de simulación requerido para alcanzar el estado estadísticamente estacionario fue de 500 unidades de tiempo y el intervalo de tiempo de integración fue de 400 unidades de tiempo.

En la Figura 3 se presenta la comparación entre los valores de flujo medio en la línea vertical $z/h = 1$ de la sección obtenidos y los presentados en [9] y [17]. Los valores se encuentran normalizados con el valor de velocidad de corte local en la pared inferior ($u_{\tau,l}$). En la zona cercana a la pared, los perfiles de velocidad cumplen con la ley lineal mientras que hacia la mitad de la sección el perfil se acerca a la ley logarítmica. En relación a los perfiles de las referencias consultadas, se puede observar que los resultados numéricos obtenidos para este trabajo presentan un buen acuerdo con los mismos. Del análisis de los resultados obtenidos para las distintas grillas puede observarse que el cálculo es independiente de las mismas.

La velocidad secundaria horizontal w en la coordenada $z/h = 0.3$ normalizada con la velocidad media, u_b se presenta en la Figura 4. Se lleva a cabo la comparación con los valores exhibidos por Pinelli [8], para dos casos cuyos valores de Re_b se encuentran entre el valor del caso estudiado. Asimismo se incluye la serie

de datos obtenida experimentalmente por Kawahara de datos obtenida experimentalmente por Kawahara [16] tomados de Pinelli [8], para $Re_b = 3535$. Puede observarse que los perfiles de velocidad obtenidos son cualitativamente similares y se mantiene entre los resultados presentados por las referencias.

En la Figura 5 se muestra el esfuerzo de corte τ_w obtenido a partir del promedio de los valores de la pared vertical y horizontal y normalizado con el promedio del mismo $\bar{\tau}_w$. Si bien existe una diferencia en el valor de Re_b entre el caso estudiado ($Re_b \approx 2724$) y el utilizado en la comparación ($Re_b = 2600$), se puede observar una buena correspondencia en cuanto a la forma de la curva y a la formación de los picos. Los valores máximos de $\tau_w/\bar{\tau}_w$ obtenidos en el centro de la sección son similares a los presentados en las referencias (Tabla 1).

Las Figura 6(a) y 6(b) presentan, respectivamente, los valores $u_{rms} = \overline{u'^2}^{1/2}$ y el esfuerzo de Reynolds, $-\overline{u'v'}$, en la línea vertical $z/h = 1$ de la sección. La Figura 6(a) muestra un buen acuerdo con las referencias presentadas y no se aprecian diferencias entre las grillas analizadas. En el caso de los perfiles de $-\overline{u'v'}$ (Figura 6(b)), si bien presentan diferencias muy pequeñas entre los distintos casos de grillas empleadas, exhiben un buen acuerdo con las observaciones experimentales.

De las comparaciones realizadas es posible concluir que el código funciona correctamente. Los datos fueron comparados con varias referencias y se puede observar una coincidencia razonable entre los mismos. Para los cálculos siguientes de flujo en ductos forzados por gradientes de presión no uniformes en la vertical se

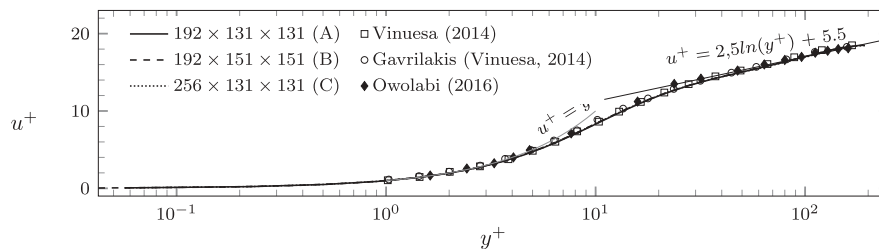


Figura 3. Flujo medio en la línea central vertical normalizado por la velocidad de corte local en la pared inferior en función de la distancia en unidades de pared. Se muestran en líneas los resultados obtenidos para distintos tamaños de grillas analizadas y en símbolos los valores presentados en las referencias.

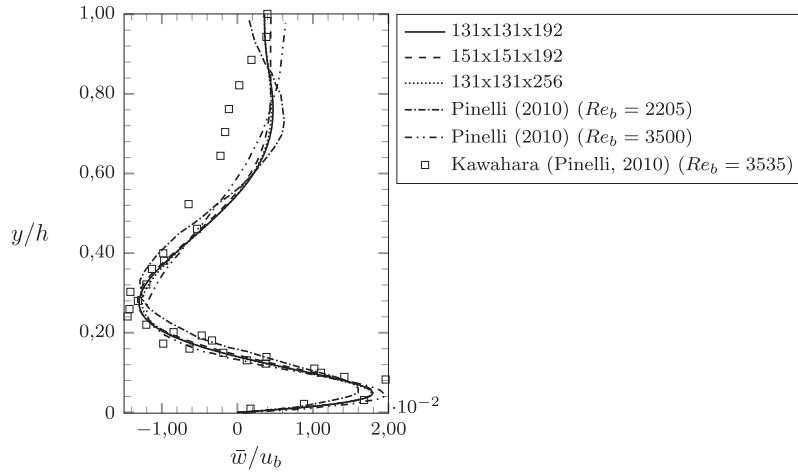


Figura 4. Velocidad secundaria horizontal w en $z/h = 0.3$ normalizada con u_b en función de la distancia.

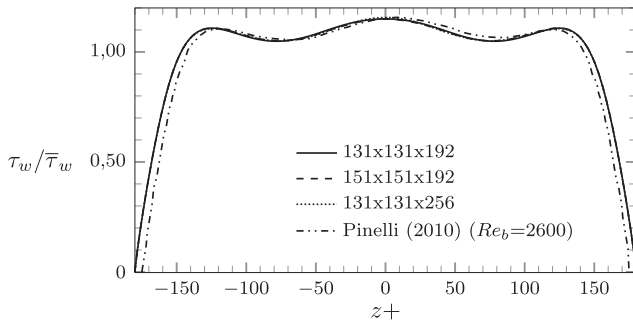


Figura 5. Esfuerzo de corte en la pared de la sección normalizado con su promedio.

utiliza la grilla más gruesa (grilla A) ya que la misma permite obtener resultados aceptables del problema con menor costo computacional.

4.2. Gradiente de presión no uniforme

En esta sección se presentan resultados del comportamiento del flujo secundario cuando el flujo es forzado por un gradiente de presión no uniforme en la dirección vertical. En este caso se aplican gradientes de presión que varían linealmente en la dirección vertical. El caso base (caso CC) es el caso utilizado para la validación tridimensional del código (Sección 4.1), donde el gradiente de presión aplicado es constante e igual a 2. Para los casos estudiados en este trabajo, las variaciones lineales en la dirección vertical de los gradientes de presión aplicados están dadas por la expresión

$$F = \beta(1 - y) + 2,$$

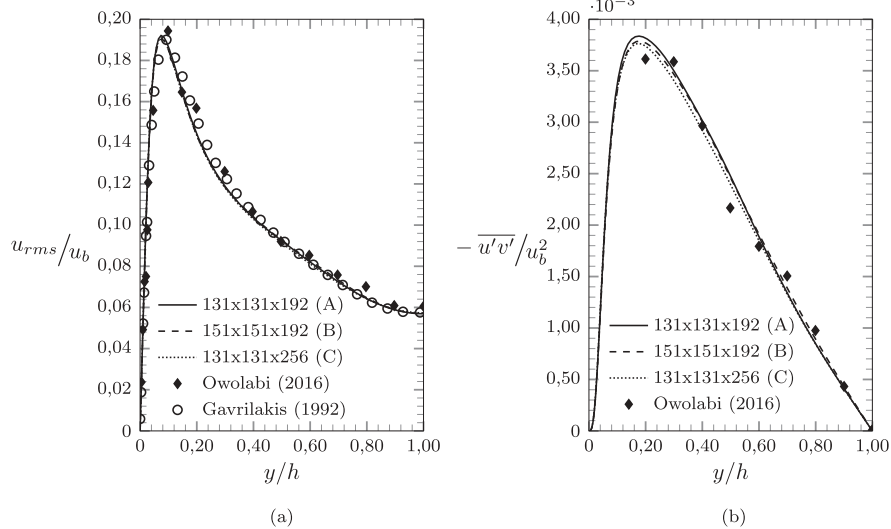


Figura 6. Valores u_{rms} (a) y esfuerzo de Reynolds (b) normalizados con la velocidad media en el centro de la sección en función de la distancia.

donde β es un coeficiente que toma los valores presentados en la [Tabla 2](#). Notar que para los casos estudiados

$$\int_0^2 F dy = 4$$

por lo que el forzado neto del flujo es el mismo.

La estadística del flujo medio se obtuvo promediando en el tiempo y en la dirección del flujo los valores instantáneos. Para los casos CL el promediado se realizó además, entre las dos mitades verticales de la sección aprovechando la simetría del problema. El tiempo de integración para calcular los promedios fue de 400 unidades de tiempo.

Los gradientes de presión en función de la vertical se muestran en la [Figura 7\(a\)](#). Mediante este forzado no uniforme se modela el efecto de la estratificación en la fuerza impulsora. Esta variación de la presión en la dirección vertical es una primera aproximación al forzado del flujo en las corrientes de turbidez generado por la concentración de sedimento suspendido. Este tipo de forzado permite modelar el efecto de estratificación en la fuerza impulsora del flujo aisladamente.

En la [Figura 7\(b\)](#) se presentan las velocidades en la dirección del flujo en la sección vertical central del

ducto para los casos estudiados. Se puede observar la pérdida de simetría de los perfiles para los casos estudiados con respecto a la línea media horizontal. El valor máximo de velocidad se desplaza hacia la pared inferior con respecto al caso CC. Esta diferencia es muy pequeña para los casos CL0.5 y CL1 pero es notoria en los casos CL1.5 y CL2. La ubicación de los valores máximos ($y_{u,max}$) para cada caso se exhibe en la [Tabla 2](#). En la mitad superior de la sección las velocidades disminuyen con respecto al caso CC. El perfil obtenido para el caso CL0.5 es muy similar al obtenido para el caso CL1.

Los valores de velocidad de corte en el centro de las paredes horizontales (inferior $u_{\tau,b}$ y superior $u_{\tau,t}$) y de las paredes verticales ($u_{\tau,h}$) se presentan en la [Tabla 2](#). Se puede observar que, respecto al caso base (CC), los valores de velocidad de corte en las paredes horizontales disminuyen.

A continuación se presentan y analizan las distribuciones en la sección de algunas variables del flujo para los casos CC, CL1 y CL2. Los casos intermedios CL0.5 y CL1.5 no exhiben diferencias importantes en comparación con los casos CL1 y CL2, respectivamente.

4.2.1. Velocidades medias

La distribución de la velocidad principal \bar{u} en la sección del ducto normalizada con la velocidad media u_b para tres de los casos estudiados se muestra en la [Figura 8](#). Se puede observar que el caso CL1 presenta una distribución similar al caso CC excepto en las zonas cercanas a las esquinas inferiores donde los valores de velocidad presentan un leve incremento. Para el caso CL2 es más notorio el descenso de la región de

Tabla 2. Casos estudiados en este trabajo.

Caso	β	$u_b/u_{\tau,avg}$	Re_b	$y_{u,max}$	$u_{\tau,b}$	$u_{\tau,t}$	$u_{\tau,h}$
CC	0.0	15.12	2721	1.00	1.072	1.072	1.072
CL0.5	0.5	15.10	2718	0.95	1.062	1.074	1.069
CL1	1.0	15.10	2718	0.93	1.066	1.049	1.076
CL1.5	1.5	14.90	2683	0.86	1.026	1.010	1.070
CL2	2.0	14.72	2650	0.81	1.016	0.982	1.061

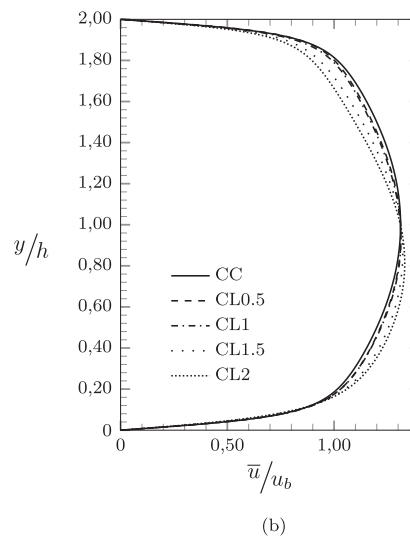
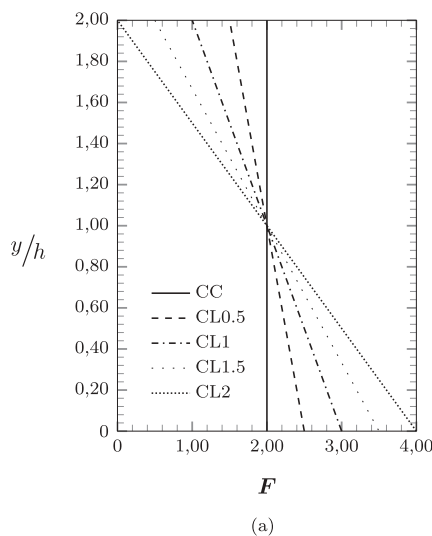


Figura 7. Perfiles en función de la altura del ducto. (a) Gradientes de presión en función de la vertical. (b) Velocidad en la dirección del flujo en el centro de la sección.

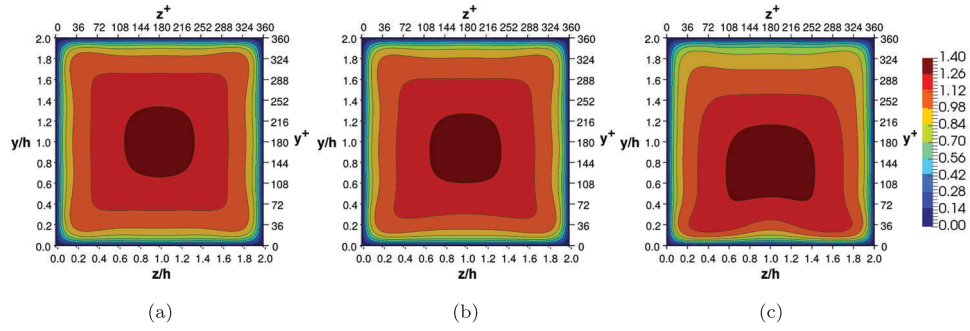


Figura 8. Velocidad \bar{u} adimensionalizada con u_b . (a) Caso CC. (b) Caso CL1. (c) Caso CL2. La escala de colores es la misma para los tres casos.

ocurrencia de los valores máximos de velocidad con respecto al caso CC. Los valores de velocidad se incrementan cerca de las esquinas inferiores y disminuyen en las esquinas superiores de la sección. Para este caso también se puede notar que en la zona cercana a la pared horizontal inferior, en el centro de la sección, la velocidad disminuye (Figura 8(c)).

La distribución de la componente vertical \bar{v} de la velocidad en la sección del ducto normalizada con u_b se presenta en la Figura 9. Se puede notar por un lado, el incremento de tamaño de las celdas positivas centrales de ambas mitades horizontales de la sección en ambos casos mostrados. Estas celdas se extienden hasta unirse en el caso CL2 en el cual se genera un máximo en la mitad inferior de la sección. Las celdas negativas ubicadas en los laterales de la zona superior de la sección también crecen en tamaño con respecto al caso base y llegan a extenderse hasta las celdas negativas ubicadas en la mitad inferior de la sección para el caso CL2. La magnitud de \bar{v} se incrementa para todos los casos con respecto al caso CC.

La distribución de la componente de velocidad \bar{w} normalizada con u_b en la sección se presenta en la Figura 10. Con respecto a la mitad vertical izquierda, se puede observar que la celda de velocidad \bar{w} negativa

de la mitad superior incrementa su tamaño en ambos casos con respecto al caso base. Para el caso CL2 esta celda se extiende hasta la línea media horizontal de la sección. La celda de velocidad \bar{w} positiva de menor magnitud ubicada cerca de la pared vertical crece en tamaño en su región inferior y disminuye en la parte superior. Para el caso CL2 se intensifica la magnitud de esta celda positiva lateral y se observa su extensión hacia la zona de la celda positiva cercana a la pared horizontal inferior. En el caso CL2 se observa un incremento significativo en la magnitud de las celdas cercanas a las paredes horizontales con respecto al caso CC.

A pesar de que los perfiles de velocidades en la dirección principal para los casos estudiados guardan cierta similitud con el perfil correspondiente al caso CC (Figuras 7(b) y 8), la distribución de las velocidades secundarias (Figuras 9 y 10) presentan diferencias con respecto al caso CC, lo que muestra el efecto del gradiente de presión no uniforme sobre el flujo secundario.

4.2.2. Flujo secundario

En la Figura 11 se presentan los vectores del flujo secundario. El tamaño de los vectores no representa la magnitud del flujo secundario. Los cuatro pares de

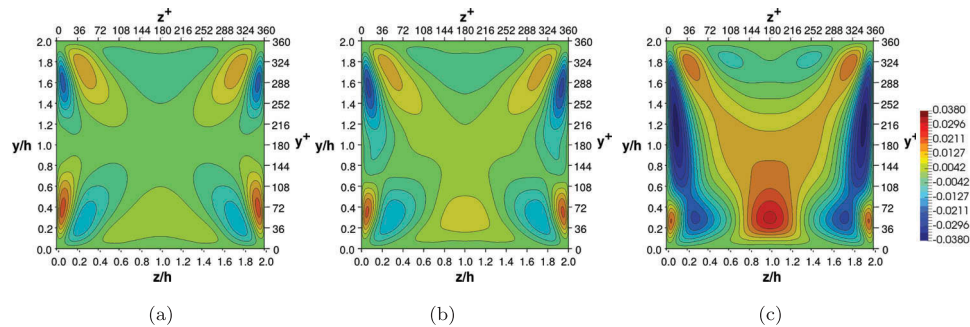


Figura 9. Velocidad \bar{v} adimensionalizada con u_b . (a) Caso CC. (b) Caso CL1. (c) Caso CL2. La escala de colores es la misma para los tres casos.

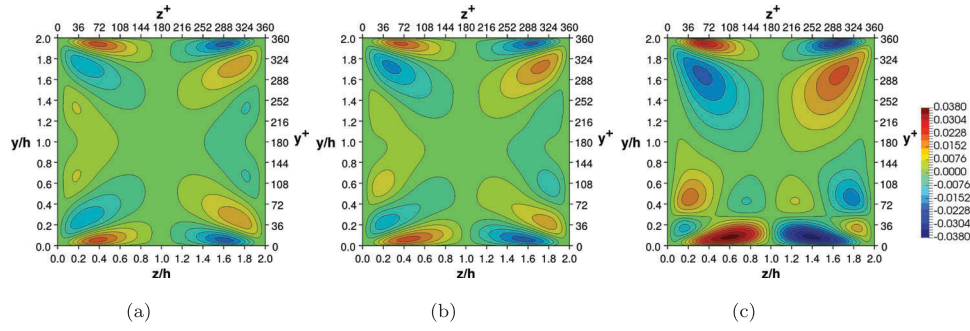


Figura 10. Velocidad \bar{w} adimensionalizada con u_b . (a) Caso CC. (b) Caso CL1. (c) Caso CL2. La escala de colores es la misma para los tres casos.

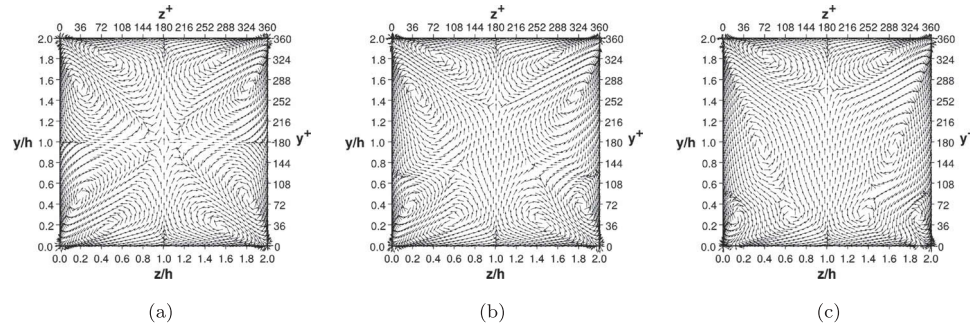


Figura 11. Vectores de flujo secundario. El tamaño de los vectores no representa la magnitud del flujo. (a) Caso CC. (b) Caso CL1. (c) Caso CL2.

vórtices contra-rotantes que se generan en el caso de gradiente de presión constante, también se generan en el caso CL1. Sin embargo, se observa que los pares de vórtices superiores laterales crecen en tamaño y se extienden hacia la mitad inferior de la sección mientras que los vórtices inferiores decrecen en tamaño. Los vórtices laterales inferiores que se generan son más pequeños que los vórtices inferiores centrales. El caso CL2 exhibe una disminución de tamaño de los vórtices centrales superiores y un crecimiento más importante del tamaño de los vórtices superiores laterales que se extienden hacia el centro de los vórtices inferiores centrales. El centro de los vórtices inferiores laterales se desplaza hacia la pared vertical y su tamaño decrece considerablemente.

4.2.3. Turbulencia

La variación de la componente del tensor de Reynolds $\overline{u'v'}$ normalizada con la velocidad de corte media $u_{\tau,avg}$ en la sección del ducto se muestra en la Figura 12. El caso CL1 muestra una distribución similar al caso base: dos celdas de signos opuestos con los máximos cercanos a las paredes horizontales y de magnitud similar para cada signo. Con respecto a las celdas laterales de menor tamaño se observa que las superiores disminuyen en tamaño y las inferiores se incrementan en

magnitud. En el caso CL2 puede notarse un crecimiento de las celdas negativas laterales de la mitad inferior de la sección y una considerable reducción del tamaño de las celdas laterales superiores. Las celdas principales se ven modificadas tanto en tamaño como en magnitud con respecto al caso CC. La celda superior se extiende hacia la línea media horizontal a la vez que incrementa su valor mientras que la celda inferior disminuye en tamaño e intensidad.

La variación de los valores u_{rms} normalizados con $u_{\tau,avg}$ en la sección se presentan en la Figura 13. El caso CL1 presenta una distribución similar al caso CC pero se observa una pequeña disminución de los valores máximos cercanos a la pared horizontal inferior y un leve descenso de la posición de los valores máximos cercanos a las paredes verticales. En el caso CL2 este descenso de la posición de los valores máximos laterales es considerable. En la región central de la sección se puede notar un incremento de los valores con respecto al caso base, mientras que en la zona superior como en la zona inferior los valores decrecen con respecto al caso CC.

La Figura 14 muestra la distribución de los valores v_{rms} normalizados con $u_{\tau,avg}$ en la sección. La ocurrencia de los valores máximos cerca de las paredes verticales se repite en los tres casos. Para el caso CL1 se

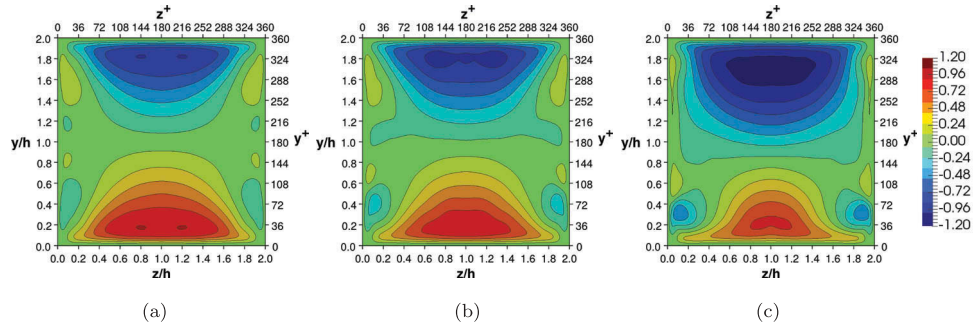


Figura 12. Tensor de Reynolds $\overline{u'v'}$ normalizado con $u_{\tau,avg}$. (a) Caso CC. (b) Caso CL1. (c) Caso CL2. La escala de colores es la misma para los tres casos.

observa un incremento en la magnitud en la zona superior de la sección y una disminución en la zona inferior de la misma con respecto al caso CC. Este mismo resultado se obtiene en mayor magnitud para el caso CL2. Asimismo, se incrementan de forma considerable los valores máximos cercanos a las paredes verticales con respecto a los valores obtenidos para el caso base.

La distribución de los valores w_{rms} normalizada con la velocidad de corte media $u_{\tau,avg}$ se exhibe en la Figura 15. Para el caso CL1 es posible observar que los máximos ubicados cerca de las paredes horizontales en el caso CC, se mantienen. Sin embargo se observa un incremento en

la magnitud de la celda ubicada en la mitad superior de la sección y una disminución de los valores cercanos a la pared inferior. Para el caso CL2, el incremento en la zona superior es considerable con respecto al caso CC. Además, en la región central de la sección se observa un aumento en la magnitud de los valores de w_{rms} .

5. Conclusiones

Con el objetivo de estudiar aisladamente el efecto del forzado de un flujo estratificado sobre el flujo secundario de segundo tipo se llevaron a cabo simulaciones directas de turbulencia (DNS) de un flujo turbulento

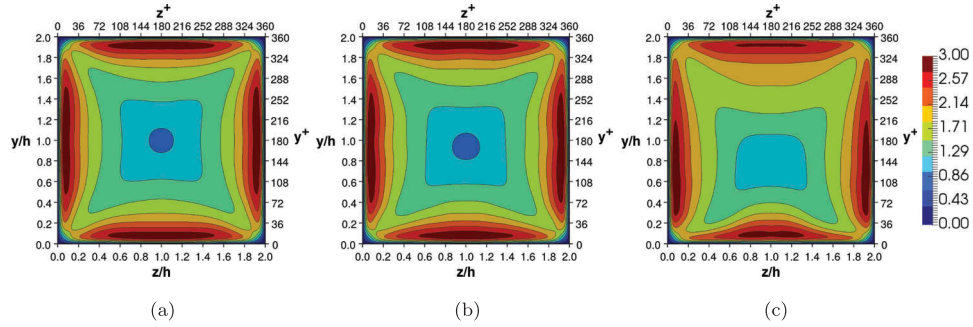


Figura 13. Valores u_{rms} adimensionalizados con $u_{\tau,avg}$. (a) Caso CC. (b) Caso CL1. (c) Caso CL2. La escala de colores es la misma para los tres casos.

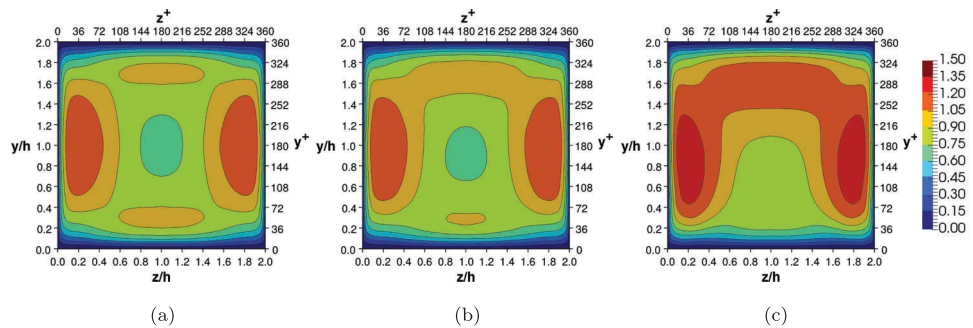


Figura 14. Valores v_{rms} adimensionalizados con $u_{\tau,avg}$. (a) Caso CC. (b) Caso CL1. (c) Caso CL2. La escala de colores es la misma para los tres casos.

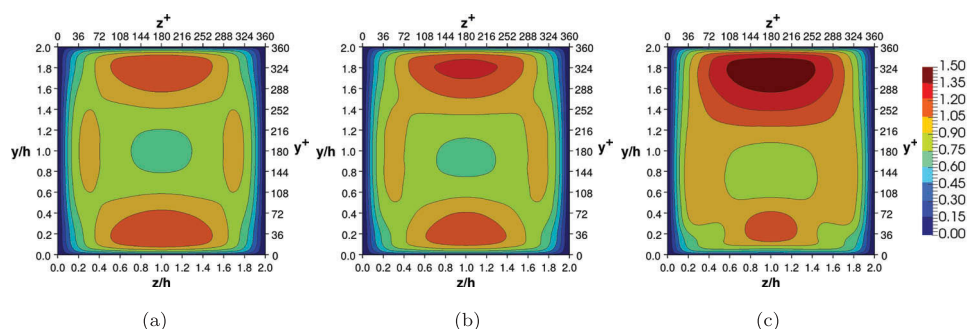


Figura 15. Valores w_{rms} adimensionalizados con $u_{\tau,avg}$. (a) Caso CC. (b) Caso CL1. (c) Caso CL2. La escala de colores es la misma para los tres casos.

en un ducto de sección cuadrada. El flujo es forzado por gradientes de presión no uniformes en la dirección vertical.

Se validaron los resultados obtenidos por medio de la comparación con un caso ampliamente estudiado y reportado en la literatura.

Se llevó a cabo el análisis del flujo secundario en flujos forzados por gradientes de presión que varían linealmente en la dirección vertical y se compararon los resultados con el flujo forzado por un gradiente uniforme. En los perfiles de velocidad principal obtenidos para los casos estudiados se observa la pérdida de la simetría con respecto a la línea horizontal media de la sección. Además se produce el descenso de las posiciones de los valores máximos de velocidad principal hacia la pared inferior de la sección. Las velocidades secundarias presentan diferencias con respecto al caso base aún presentando los casos estudiados perfiles de velocidades medias similares al caso forzado por un gradiente de presión uniforme. Estas modificaciones incluyen cambios de signo y variaciones en las magnitudes.

En cuanto a la generación de los vórtices principales de flujo secundario se observa un comportamiento similar al caso CC para el caso CL1 con un leve incremento del tamaño de los vórtices superiores laterales. Para el caso CL2 estos vórtices se extienden hacia la línea media horizontal de la sección.

Los parámetros relacionados con la turbulencia muestran una variación con respecto al caso CC. Tanto el tensor de Reynolds $-\overline{u'v'}$ como los valores rms presentados en este trabajo muestran un aumento en la parte superior de la sección y una disminución en la zona inferior con respecto al caso base.

Declaración de divulgación

Los autores no informaron ningún conflicto de intereses potencial.

Referencias

- [1] Bradshaw P. Turbulent secondary flows. *Annu Rev Fluid Mech.* 1987;19:53–74.
- [2] Prandtl L. Über die ausgebildete Turbulenz. Zurich: Verh. 2nd Intl Kong. für Tech. Mech.; 1926. NACA Tech. Memo 62, 435.
- [3] Abad JD, Frias CE, Buscaglia GC, et al. Modulation of the flow structure by progressive bedforms in the Kinoshita meandering channel. *Earth Surf Process Landf.* 2013;38:1612–1622.
- [4] Simpson JE. Gravity Currents in the environment and the laboratory. Cambridge: Cambridge University Press; 1997.
- [5] Gavrilakis S. Numerical simulation of low-Reynolds-number turbulent flow through a straight square duct. *J Fluid Mech.* 1992;244:101–129.
- [6] Huser A, Biringen S. Direct numerical simulation of turbulent flow in a square duct. *J Fluid Mech.* 1993;257:65–95.
- [7] Pinelli A, Uhlmann M, Sekimoto A, et al. Reynolds number dependence of mean flow structure in square duct turbulence. *J Fluid Mech.* 2010;644:107–122.
- [8] Zhang H, Trias FX, Gorobets A, et al. Direct numerical simulation of a fully developed turbulent square duct flow up to Re_τ . *J Heat Fluid Flow.* 2015;54:258–267.
- [9] Vinuesa R, Noorani A, Lozano-Durán A, et al. Aspect ratio effects in turbulent duct flows studied through direct numerical simulation. *J Turbul.* 2014;15:677–706.
- [10] Madabhushi RK, Vanka SP. Large eddy simulation of turbulence-driven secondary flow in a square duct. *J Phys Fluids A.* 1991;3(11):2734–2744.
- [11] Breuer M, Rodi W. *Direct and Large eddy simulation I*, En: ERCOFTAC Workshop on Direct and Large-Eddy Simulation. Ed. Voke, P. R. and Kleiser, L. Chollet, J.P. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers; 1994. 273–285.
- [12] Yao J, Zhao Y, Fairweather M. Numerical simulation of turbulent flow through a straight square duct. *Appl Therm Eng.* 2015;91:800–811.
- [13] Brundrett E, Baines WD. The production and diffusion of vorticity in a square duct. *J Fluid Mech.* 1964;19:375–394.
- [14] Launder BE, Ying WM. Secondary flows in ducts of square cross-section. *J Fluid Mech.* 1972;54:289–295.

- [15] Melling A, Whitelaw JH. Turbulent flow in a rectangular duct. *J Fluid Mech.* 1976;78:289–315.
- [16] Kawahara G, Ayukawa K, Ochi J, et al. Wall shear stress and Reynolds stresses in a low Reynolds number turbulent square duct flow. *Trans JSME B.* 2000;66(641):65–102.
- [17] Owolabi BE, Poole RJ, Dennis DJC. Experiments in low-Reynolds-number turbulent flow through a square duct. *J Fluid Mech.* 2016;798:398–410.
- [18] García MH. *Turbidity currents*, En: brekhovskikh, L. and Turekian, K. and Emery, K. and Tseng, C. *Encyclopedia of earth system science*. Vol. 4. New York: Academic Press, Inc.; 1992. 399–408.
- [19] Armenio V, Sarkar S. An investigation of stably stratified turbulent channel flow using large-eddy simulation. *J Fluid Mech.* 2000;66:95–102.
- [20] Cantero MI, Balachandar S, Cantelli A, et al. Turbidity current with a roof: direct numerical simulation of self-stratified turbulent channel flow driven by suspended sediment. *J Geophys Res.* 2009a;114:C03008, p. 20.
- [21] Cantero MI, Balachandar S, Parker G. Direct numerical simulation of stratification effects in sediment-laden turbulent channel flow. *J Turbul.* 2009b;10:1–28.
- [22] Shringarpure M, Cantero MI, Balachandar S. Dynamics of complete turbulence suppression in turbidity currents driven by monodisperse suspensions of sediment. *J Fluid Mech* 2012;712:384–417.
- [23] Shringarpure M, Cantero MI, Balachandar S. Mechanisms of complete turbulence suppression in turbidity currents driven by mono-disperse and bi-disperse suspensions of sediment. *J Comput Multiphase Flows.* 2014;6(3):16–23.
- [24] Shringarpure M, Cantero MI, Balachandar S. Analysis of turbulence suppression in sediment-laden saline currents. *Procedia Eng.* 2015;126:16–23.
- [25] Kim J, Moin P. Application of a fractional step method to incompressible Navier-Stokes equations. *J Comput Phys* 1985;59:308–323.
- [26] Canuto C, Hussaini M, Quarteroni A, et al. *Spectral methods in fluid dynamics*. New York: Springer-Verlag; 1988.
- [27] Martorana JV, Cantero MI, Dari EA. Simulación directa de turbulencia de flujo secundario en ductos rectos con gradientes de presión no uniformes. *Mecánica Compu.* 2016;XXXIV:2137–2153.
- [28] Jones OC. An improvement in the calculation of turbulent friction in rectangular ducts. *J Fluids Eng.* 1974;98:173–181.